Rappresentazione dei numeri complessi.

$z = a + ib$ $\qquad z = a\mathbb{1} + bi$ $\qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

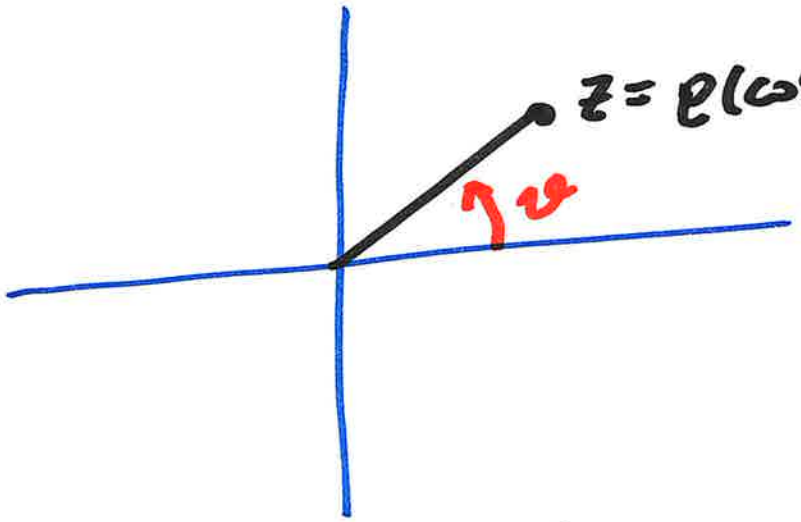
$$z^T \cdot z = (a^2 + b^2) \cdot I$$

$$z' = \frac{z}{|z|} = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$$

$$z' \cdot {}^T z' = I$$

$$\Rightarrow z = \rho \cdot \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \rho \geq 0 \quad \rho \in \mathbb{R}$$

$$\| \quad \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$



$\rho \in \mathbb{R}$

$0 \leq \vartheta < 2\pi$

$$\mathcal{U}(1) := \{ z \in \mathbb{C} : z\bar{z} = 1 \} \cong SO_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \rightarrow \cos\vartheta + i\sin\vartheta = e^{i\vartheta}$$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow e^x \end{cases} \qquad \boxed{e^x := \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} x^j}$$

$$e^x \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \rightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} z^j \end{cases} \qquad Z = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} z^j$$

$\vartheta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\vartheta} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} (i)^j \vartheta^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2j!} (i)^{2j} \vartheta^{2j} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)!} (i)^{2j+1} \vartheta^{2j+1}$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2j!} \vartheta^{2j}}_{\downarrow} + i \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \vartheta^{2j+1}}_{\downarrow} =$$

$$\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$$

RADICI n-esime di 1

$\sqrt[n]{1} = 1$

è una soluzione di

$(x^n - 1)$.

radici quad. $+1, -1$

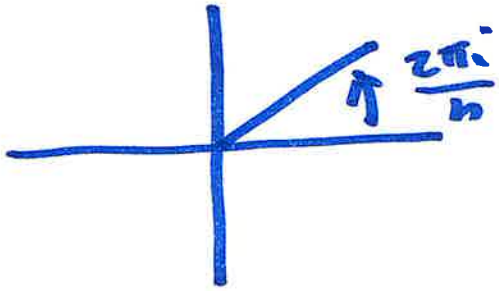
radici quarte $+1, -1, +i, -i$

DAL TEOREMA FOND. DELL'ALGEBRA $(x^n - 1)$ HA n radici.

$e^{\frac{2\pi i}{n}}$ è una radice n-esima di 1

e tutte le radici n-esime di 1 sono del tipo

$e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ $\quad 0 \le k < n$

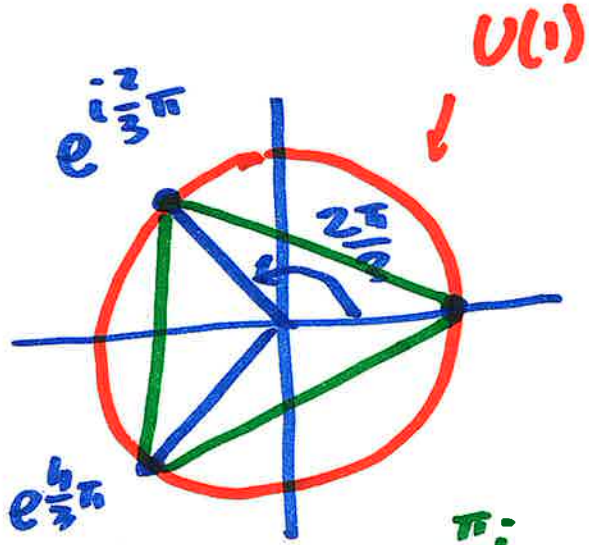


$\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = e^{2\pi i} = 1$

se fosse $\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k = 1$

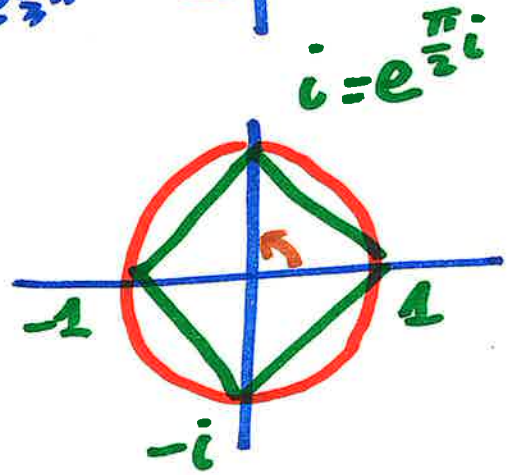
per $k < n$ $k \neq 0$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi h}{k}\right) = 1$

$\sin\left(\frac{2\pi h}{k}\right) = 0$ $\lightning$



radici cubiche

$\frac{2\pi}{3}$



radici quarte.

In generale le radici n-esime di 1 in $\mathbb{C}$ sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio 1 e centro (0,0) nel piano $\mathbb{C}(\mathbb{R}, i)$

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Equazione di Eulero.

DIAGONALIZZAZIONE, AUTOVALORI ed AUTOVETTORI.

$V(\mathbb{K})$ spazio vettoriale $\quad$ $\mathbb{K}$ campo

$f: V(\mathbb{K}) \to V(\mathbb{K})$ lineare $\quad$ f è detto endomorfismo.

Ha senso chiedersi quando f fissa un vettore $\bar{v} \neq 0$

$$f(\bar{v}) = \bar{v}$$

se A = matrice di f rispetto una base $\mathcal{B}$

e X = componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$$f(\bar{v}) = \bar{v} \iff AX = X \iff (A-I)X = 0$$
$$\iff X \in \ker(A-I)$$

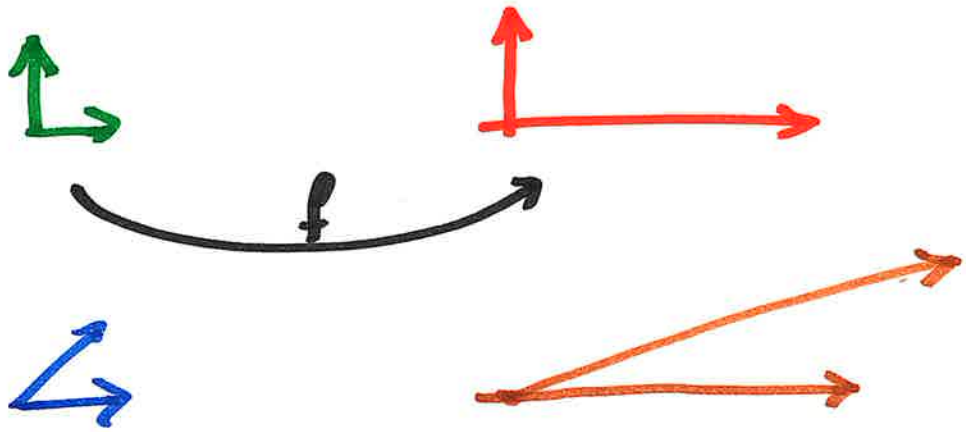
$$f(x,y,z) = (2x, 3y, -z)$$

⇒ rispetto questa base la matrice rappresentativa di f è diagonale ed è

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

⇒ f si scrive (e calcola) in modo semplice rispetto questa base!

$$f(x_1\, x_2 \dots x_n) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots \lambda_n x_n).$$



più in generale ci chiediamo quando $f: V \to V$ fissa una direzione ovvero

$$\exists \bar{v} \in V : f(\bar{v}) \in \mathcal{L}(\bar{v}) \quad \bar{v} \neq \underline{0}$$

Def: $\bar{v} \in V(\mathbb{K})$ è detto autovettore per f se $\bar{v} \neq \underline{0}$ e $f(\bar{v}) \in \mathcal{L}(\bar{v})$.

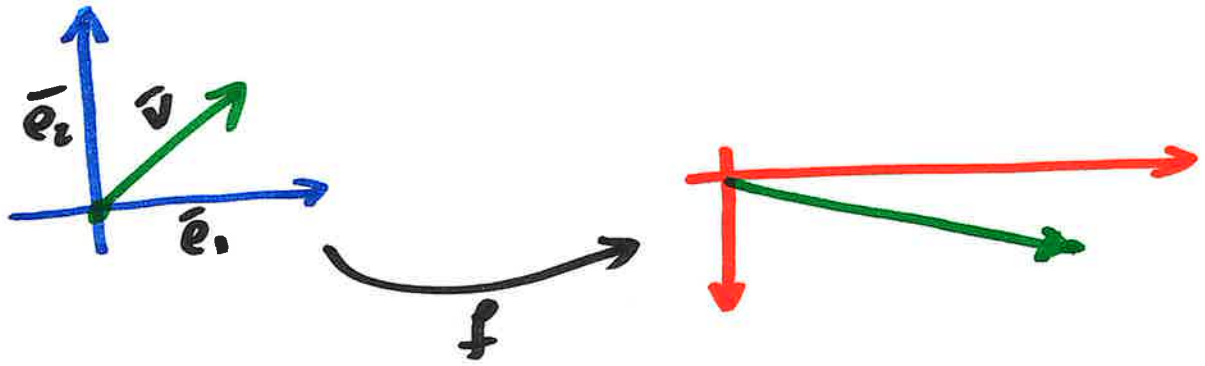
se $\bar{v} \in V(\mathbb{K})$ autovettore per $f \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ tale che

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$$

λ è detto autovalore dell'autovettore $\bar{v}$.

oss 1: Se $\exists$ una base $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ di $V_n(\mathbb{K})$ di autovettori per $f \Rightarrow f(\bar{e}_1) = \lambda_1 \bar{e}_1 \dots f(\bar{e}_n) = \lambda_n \bar{e}_n \Rightarrow$

→ VETTORE AUTOVETTORE



$f(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1$
$f(\bar{e}_2) = -\frac{1}{2}\bar{e}_2$
$\Rightarrow f(x,y) = (2x, -\frac{1}{2}y)$

<u>oss 2</u>: Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto una qualsiasi base di $V(\mathbb{K})$.

$\Rightarrow$ Data $f(\bar{v}) \in \mathcal{L}(\bar{v})$ $\iff$

$\exists \lambda \in \mathbb{K}$: $AX = \lambda X \iff (A - \lambda I)X = \underline{0}$

$\Leftrightarrow X \in \ker(A-\lambda I)$.

Quando esistono autovettori di autovalore λ?

→ quando $\exists X \neq \underline{0}$: $X \in \ker(A-\lambda I)$

→ quando $\dim \ker(A-\lambda I) \neq 0$

→ quando $\text{null}(A-\lambda I) > 0$

→ quando ~~debole~~ $\text{rk}(A-\lambda I) < n$

cioè $\det(A-\lambda I) = 0$.

Teorema: gli autovalori di f sono tutti e soli i λ tali che la funzione $(f-\lambda id)$ non è invertibile.

→ PASSANDO ALLE MATRICI: sono tutti e soli i λ tali che $\det(A-\lambda I)=0$

ove A è una qualsiasi matrice rappresentativa di f.

Def: Sia $f: V(\mathbb{K}) \to V(\mathbb{K})$ una funzione lineare.

→ Si dice spettro $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f)$ l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{K}$ tali che $(f - \lambda\, id): V \to V$ non è invertibile.

→ Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$: Si dice spettro di A

$$\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

Le due def. coincidono quando $f = f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ x \to Ax \end{cases}$

Lo spettro di una matrice è l'insieme dei suoi autovalori.

In dim. finita sia A una matrice.

- $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ X \to AX \end{cases}$

- AUTOVETTORI DI A $= \{X \in \mathbb{K}^{n,1} : \exists \lambda \in \mathbb{K} : AX = \lambda X, X \neq 0\}$.
  = AUTOVETTORI DI f_A
- AUTOVALORI DI A = soluzioni di $\det(A - \lambda I) = 0$ in $\mathbb{K}$
  = AUTOVALORI DI f_A $\quad \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dice

- polinomio caratteristico $p_A(x) := \det(A - xI)$
- equazione caratteristica $p_A(x) = 0$
- $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$ = insieme autovalori di A =
  = insieme radici polinomio caratt.
  = insieme soluzioni eq. caratteristica.

Se X autovettore di $A \Rightarrow \exists \lambda : AX = \lambda X$

consideriamo ora $V_\lambda := \{ X : AX = \lambda X \}$ con $\lambda \in Spec(A)$

$$\Rightarrow V_\lambda = \{ X \mid (A - \lambda I)X = \underline{0} \} =$$

$$= \ker(A - \lambda I).$$

- Sia $\lambda \in Spec(A)$ si dice **autospazio di autovalore λ**

$$V_\lambda := \ker(A - \lambda I)$$

⚠ V_λ è l'insieme di tutti gli autovettori di autovalore λ cui si aggiunge anche $\underline{0}$ che **non** è autovettore.

si dice **molteplicità geometrica** di λ il numero

$$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$$

dimensione dell'autospazio.

$$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda = \dim \ker(A-\lambda I) = n - \operatorname{rk}(A-\lambda I) \geq 1$$

se λ autovettore perché $\det(A-\lambda I)=0$

$\Rightarrow \operatorname{rk}(A-\lambda I) < n$.

Def: $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta **diagonalizzabile** se esiste una base di $\mathbb{K}^{n,1}$ formata da autovettori per A

[Ovvero $V_n(\mathbb{K})$ ammette una base tale che la sua matrice è diagonale rispetto ad essa]

Teorema: $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ A è simile ad una matrice diagonale cioè

$\exists P \in GL(n,\mathbb{K})$ e $D \in \mathbb{K}^{n,n}$ diagonale tali che

$P^{-1}AP = D$

DIM: $P^{-1}AP = D \iff AP = PD$ con $P \in GL(n, \mathbb{K})$

Siano $(C_1\ C_2 \dots C_n)$ le colonne di P

$(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ le entrate diagonali di D

$$\Rightarrow \quad AP = PD \iff A(C_1 \dots C_n) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \iff$$

$$(AC_1\ AC_2 \dots AC_n) = (\lambda_1 C_1\ \lambda_2 C_2 \dots \lambda_n C_n)$$

$$\iff \begin{cases} AC_1 = \lambda_1 C_1 \\ \vdots \\ AC_n = \lambda_n C_n \end{cases} \iff C_1 \dots C_n \text{ sono autovettori per } A$$

e $\det(P) \neq 0 \Rightarrow C_1 \dots C_n$ sono una base di $\mathbb{K}^{n,1}$

[A simile a D $\Rightarrow$ A diagonalizzabile].

A diagonalizzabile $\Rightarrow \exists\, c_1 \dots c_n$ base di autovettori per $\mathbb{K}^{n,1}$ e $\lambda_1 \dots \lambda_n$ tali che

$$Ac_i = \lambda_i c_i \qquad 1 \le i \le n$$

poniamo $P = (c_1 c_2 \dots c_n) \Rightarrow AP = (Ac_1 \dots Ac_n) =$

$$= (\lambda_1 c_1 \dots \lambda_n c_n) = (c_1 \dots c_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= D$$

$$= PD \quad \text{e quindi}$$

$$P^{-1}AP = D$$

Def: La matrice P tale che $P^{-1}AP = D$ è detta matrice diagonalizzante per A e D è detta matrice (simile) diagonale.

A diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\exists$ base di autovettori

$\Leftrightarrow$ $\exists$ base di vettori che appartengono a

$$\bigcup_{\lambda \in \mathrm{Spec}A} V_\lambda$$

Ci serve in particolare che

$$\mathbb{K}^{n,1} = V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_t} \qquad \mathrm{Spec}A = \{\lambda_1 \dots \lambda_t\}$$

Ci serve quantomeno che gli autospazi generino tutto $\mathbb{K}^{n,1}$

$$\dim(V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_k}) = n.$$

cioè in particolare deve essere

$$\sum_{\lambda_i \in \mathrm{Spec}(A)} \dim(V_{\lambda_i}) \geq n$$

deve essere $\boxed{\sum_{\lambda_i \in \mathrm{Spec}(A)} m_g(\lambda_i) \geq n}$.

Teorema: $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} V_\lambda$

GLI AUTOSPAZI DI A SONO TUTTI IN SOMMA DIRETTA FRA LORO.

COROLLARIO:

1) $\sum m_g(\lambda) \leq n$ perché

$$\dim\left(\bigoplus V_\lambda\right) = \sum \dim(V_\lambda) \leq n$$

2) $\sum m_g(\lambda) = n \iff \bigoplus V_\lambda = \mathbb{K}^{n,1}$

3) $\exists$ una base di autovettori per $\mathbb{K}^{n,1}$
$\iff \sum m_g(\lambda) = n$

La base si costruisce unendo basi degli autospazi (che ovviamente sono formate da autovettori).

DIM: per induzione sul numero t di autospazi che compaiono nella somma.

$[t=2]$ Siano $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}$ due autospazi distinti:

$\Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Supponiamo $X \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} \Rightarrow \begin{matrix} AX = \lambda_1 X \\ AX = \lambda_2 X \end{matrix}$

$\Rightarrow \lambda_1 X = \lambda_2 X \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)X = \underline{0}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\Rightarrow X = \underline{0} \Rightarrow V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$.

$V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\underline{0}\}$.

$[t-1 \Rightarrow t]$ Siano $\lambda_1 \dots \lambda_t$ t autovalori tutti distinti:

e consideriamo

$$\bar{v} \in V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_{t-1}} + V_{\lambda_t}$$

supponiamo per assurdo $\exists\ \bar{v}_i, \bar{w}_i \in V_{\lambda_i}$ $1 \le i \le t$

tali che

$$v = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_{t-1} + \bar{v}_t$$

$$= \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \dots + \bar{w}_{t-1} + \bar{w}_t$$

DOBBIAMO MOSTRARE $\bar{v}_i = \bar{w}_i \ \forall i$

→ calcoliamo

$$A\bar{v} = A(\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_{t-1} + \bar{v}_t) =$$

$$= A\bar{v}_1 + A\bar{v}_2 + \dots + A\bar{v}_{t-1} + A\bar{v}_t =$$

$$= \lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_{t-1} \bar{v}_{t-1} + \lambda_t \bar{v}_t$$

$$A\bar{v} = \dots = \lambda_1\bar{w}_2 + \lambda_2\bar{w}_3 + \dots + \lambda_{t-1}\bar{w}_{t-1} + \lambda_t\bar{w}_t$$

$$(A\bar{v} - \lambda_t\bar{v}) = (\lambda_1\bar{v}_2 + \dots + \lambda_{t-1}\bar{v}_{t-1} + \lambda_t\bar{v}_t) -$$

$$(\lambda_t\bar{v}_2 + \dots + \lambda_t\bar{v}_{t-1} + \lambda_t\bar{v}_t) =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_t)\bar{v}_2 + \dots + (\lambda_{t-1} - \lambda_t)\bar{v}_{t-1}$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_t)\bar{w}_1 + \dots + (\lambda_{t-1} - \lambda_t)\bar{w}_{t-1}}_{\in V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_{t-1}}}$$

per ipotesi induttiva

$$\Rightarrow \quad (\lambda_2 - \lambda_t)\bar{v}_2 = (\lambda_1 - \lambda_t)\bar{w}_1 \dots$$

$$(\lambda_{t-1} - \lambda_t)\bar{w}_{t-1} = (\lambda_{t-1} - \lambda_t)\bar{w}_{t-1}$$

cioè $(\lambda_i - \lambda_t)\bar{v}_i = (\lambda_i - \lambda_t)\bar{w}_i \quad 1 \le i \le t-1$

ma $(\lambda_i - \lambda_t) \neq 0 \Rightarrow \bar{v}_i = \bar{w}_i \quad \forall i \ 1 \le i \le t-1$

$$\Rightarrow \bar{v} = \bar{v}_2 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_{t-1} + \bar{v}_t = \quad (1)$$

$$= \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \dots + w_{t-1} + \bar{w}_t = \quad (2)$$

$$= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_{t-1} + \bar{w}_t \quad (3)$$

DA (1)+(3) segue $\bar{v}_t = \bar{w}_t \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la scrittura di $\bar{v}$ è unica $\Rightarrow$ la somma

$$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_t}$$

è diretta

□